Diplôme National du Brevet

SESSION 2011

Activités numériques

EXERCICE 1 :

1. **a.** On constate sur le graphique donné que la face jaune est apparue 20 fois sur un total de 100 lancers. Par conséquent,

$$\boxed{\text{La fréquence d'apparition du jaune est égale à } \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 20\%}$$

b. On détermine de même la fréquence d'apparition de la couleur noire.

$$\boxed{\text{La fréquence d'apparition du noir est égale à } \frac{30}{100} = 0,3 = 30\%}$$

2. **a.** On sait que le dé est équilibré et qu'il n'a qu'une seule face jaune sur six.
Donc,

$$\boxed{\text{la probabilité d'obtenir la couleur jaune est égale à } \frac{1}{6}}$$

b. On sait que le dé est équilibré et qu'il a 2 faces noires sur six.
Donc,

$$\boxed{\text{la probabilité d'obtenir la couleur jaune est égale à } \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$$

3. On constate que les fréquences obtenues en question 1 sont diférentes des probabilités calculées en question 2.
Les probabilités étant les fréquences obtenues lorsque le nombre de lancers est très supérieur à 100, il y a toutes les chances de recueillir un écart entre les fréquences obtenues à la question 1 et les probabilités trouvées à la question 2 pour un nombre de lancers égal à 100.

EXERCICE 2 :

- *1re réponse possible : arriver à mettre le problème en équations*
Désignons par x et y les prix respectifs d'un triangle de verre et d'un triangle de métal.
On sait que le bijou n°1, formé de 4 triangles de verre et de 4 triangles de métal, coûte 11 e, soit :

$$4x + 4y = 11 \qquad (1)$$

On sait de plus que le bijou n°2, formé de 6 triangles de verre et de 2 triangles de métal, coûte $9,10$ e, soit :

$$6x + 2y = 9,1 \qquad (2)$$

Les bijoux étant fabriqués avec les mêmes triangles, on a donc

$$\begin{cases} 4x + 4y = 11 \\ 6x + 2y = 9,1 \end{cases} \qquad (3)$$

soit, en multipliant les deux membres de l'équation (2) par 2, il vient

$$\begin{cases} 4x + 4y = 11 \\ 12x + 4y = 18,2 \end{cases} \qquad (4)$$

et en soustrayant membre à membre la 1re équation de la 2e du système (4), on obtient

$$\begin{aligned} 8x &= 7,2 \\ x &= \frac{7,2}{8} \\ x &= 0,9 \end{aligned}$$

suite page suivante. . .

puis, avec la 1$^{\text{re}}$ équation du système (4), on a

$$\begin{array}{rcrcl} 4 \times 0,9 & + & 4y & = & 11 \\ 3,6 & + & 4y & = & 11 \\ & & 4y & = & 7,4 \\ & & y & = & \dfrac{7,4}{4} \\ & & y & = & 1,85 \end{array}$$

Comme

$$\begin{array}{lcl} V & = & 6 \times 0,9 \ + \ 2 \times 1,85 \\ V & = & 5,4 \ + \ 3,7 \\ V & = & 9,1 \end{array}$$

le système d'équations (3) admet $(0,9\,;\,1,85)$ pour unique solution.
Le bijou n°3 étant constitué de 5 triangles de verre et de 3 triangles de métal, on déduit son prix P.

$$\begin{array}{lcl} P & = & 5 \times 0,9 \ + \ 3 \times 1,85 \\ P & = & 4,5 \ + \ 5,55 \\ P & = & 10,05 \end{array}$$

D'où

$$\boxed{\text{le bijou n°3 coûte } 10{,}05\,€}$$

- *2e réponse possible : utiliser la définition de la moyenne*
  On sait que :
  - le bijou n°1 est constitué de 4 triangles de métal ;
  - le bijou n°2 est constitué de 2 triangles de métal ;
  - le bijou n°3 est constitué de 3 triangles de métal.

  Donc, le bijou n°3 a un nombre de triangles de métal (respectivement de verre) égal au nombre moyen de ceux qui constituent les bijoux n°1 et n°2.
  On en déduit que le nombre de triangles de métal (respectivement de verre) qu'auraient les deux premiers bijoux serait de 3 (respectivement de 5) s'ils devaient tous les deux avoir le même nombre de triangles de métal et de verre.
  D'où, deux bijoux n°3 contiennent le même nombre de triangles de métal et de verre qu'un bijou n°1 et n°2.
  Mais, on sait que
  - un bijou n°1 coûte 11€ ;
  - un bijou n°2 coûte 9,10€.

  Donc, un bijou n°1 et un bijou n°2 coûtent

  $$11 + 9,10 = 20,10€$$

  Or, un tel achat équivaut à l'achat de 2 bijoux n°3.
  Donc

  $$\boxed{\text{un bijou n°3 coûte } 20,10 : 2 = 10,50€}$$

EXERCICE 3 :

1. • **Affirmation 1 :**

   - *1re réponse possible : essayer une valeur de a dans l'espoir d'avoir une égalité fausse*
     Désignons par G et D les expressions

     $$G = (2a + 3)^2 \qquad \text{et} \qquad D = 4a^2 + 9$$

     Alors on a, pour $a = 1$,

     $$\begin{array}{lcl} G = (2 \times 1 + 3)^2 & & D = 4 \times 1^2 + 9 \\ G = (2 + 3)^2 & \text{et} & D = 4 \times 1 + 9 \\ G = 5^2 & & D = 4 + 9 \\ G = 25 & & D = 13 \end{array}$$

     D'où,

     $$(2a + 3)^2 \neq 4a^2 + 9$$

     pour $a = 1$.
     Donc,

suite page suivante...

$$\boxed{\text{l'affirmation 1 est fausse}}$$

- *2e réponse possible : développer le membre de gauche pour voir si l'égalité est vraie ou non*

  Soit G l'expression définie pour tout nombre a par

$$G = (2a + 3)^2$$

  alors

$$\begin{aligned} G &= (2a)^2 + 2 \times (2a) \times 3 + 3^2 \\ G &= 4a^2 + 12a + 9 \end{aligned}$$

  Donc, si $a \neq 0$, on a

$$(2a + 3)^2 \neq 4a^2 + 9$$

  Donc,

$$\boxed{\text{l'affirmation 1 est fausse}}$$

- **Affirmation 2 :**
  - *1re réponse possible : essayer avec un exemple.*

    Si un article coûte 100€ alors, 20% de son prix représente $100 \times \frac{20}{100} = \frac{100 \times 20}{100} = 20$€, et le prix de l'article augmenté de 20% passe à $100 + 20 = 120$€.

    Mais 20% du nouveau prix représentant $120 \times 20\% = 120 \times \frac{20}{100} = 120 \times \frac{1}{5} = \frac{120}{5} = 24$€, le prix final de l'article tombe à $120 - 24 = 96$€, et ne coïncide pas avec le prix initial de 100€.

    Donc,

$$\boxed{\text{l'affirmation 2 est fausse}}$$

  - *2e réponse possible : traduire le texte à l'aide de ce que l'on sait grâce au cours.*

    On sait que
    - augmenter le prix d'un article de 20% revient à multiplier ce prix par $1,2$;
    - diminuer le prix d'un article de 20% revient à multiplier ce prix par $0,8$.

    Donc, augmenter puis diminuer le prix d'un article revient à multiplier son prix initial par

$$\begin{aligned} k &= 1,2 \times 0,8 \\ k &= 0,96 \end{aligned}$$

    autrement dit, augmenter un prix de 20% puis effectuer une remise de 20% sur ce nouveau prix revient à diminuer le prix initial de 4%

    Donc,

$$\boxed{\text{l'affirmation 2 est fausse}}$$

2. - **Égalité 1**

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{32}}{2} &= \frac{\sqrt{16 \times 2}}{2} \\ \frac{\sqrt{32}}{2} &= \frac{4\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{32}}{2} &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

   D'où,

$$\boxed{\frac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2}}$$

   - **Égalité 2**

   On sait que

$$10^5 > 1 \qquad \text{et} \qquad 10^{-5} > 0$$

   Donc,

$$10^5 + 10^{-5} \neq 10^0$$

   Mais

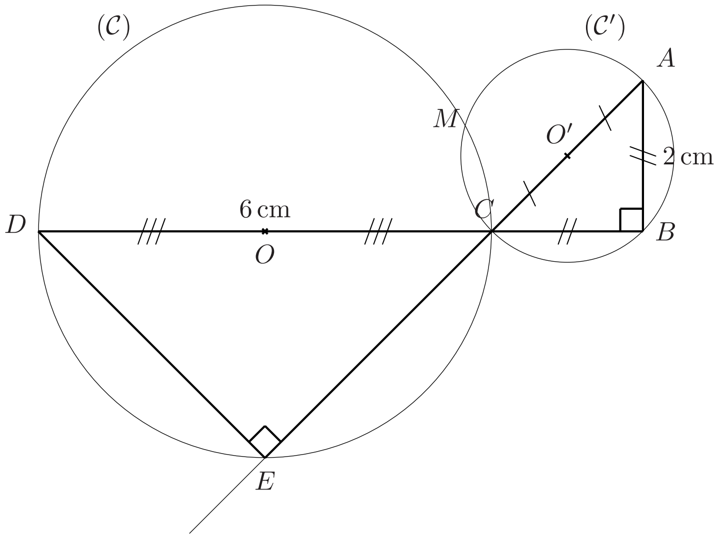
$$\boxed{10^5 \times 10^{-5} = 10^{5+(-5)} = 10^0}$$

suite page suivante...

Activités géométriques

EXERCICE 1 :

1.



2. **a.** • *1re réponse possible : en utilisant les propriétés des triangles*

On sait que le triangle ABC est rectangle en B avec

$$AB = CB$$

Donc, ABC est un triangle isocèle-rectangle en B.

Or, si un triangle est isocèle-rectangle, alors ses angles aigus mesurent 45°.

Donc

$$\boxed{\widehat{ACB} = 45^\circ}$$

• *2e réponse possible : en utilisant la trigonométrie dans les triangles rectangles*

On sait que le triangle ABC est rectangle en B avec

$$AB = CB = 2\,\text{cm}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\tan\widehat{ACB} &= \frac{AB}{AC}\\ \tan\widehat{ACB} &= \frac{2}{2}\\ \tan\widehat{ACB} &= 1\end{aligned}$$

D'où,

$$\boxed{\widehat{ACB} = 45^\circ}$$

b. On sait que le points A, C et E d'une part, et B, C et D d'autre part, sont alignés.

Donc, les angles $\widehat{DCE}$ et $\widehat{ACB}$ sont opposés par leur sommet.

Or, si deux angles sont opposés par leur sommet alors ils sont de même mesure.

Donc

$$\boxed{\widehat{DCE} = \widehat{ACB} = 45^\circ}$$

3. • *1re réponse possible : en utilisant le sinus de l'angle opposé au côté [DE].*

- Calculons $\widehat{CDE}$

On sait que CDE est un triangle rectangle en E.

Or, si un triangle est rectangle alors ses angles aigus sont complémentaires.

Donc

$$\begin{aligned}\widehat{CDE} &+ \widehat{DCE} = 90^\circ\\ \widehat{CDE} &+ 45^\circ = 90^\circ\\ \widehat{CDE} &= 90^\circ - 45^\circ\end{aligned}$$

soit

$$\widehat{CDE} = 45^\circ$$

suite page suivante...

- Calculons DE.
  On sait que le triangle CDE est rectangle en E.
  Donc,

$$\begin{aligned} \sin \widehat{DCE} &= \frac{DE}{DC} \\ \sin 45^\circ &= \frac{DE}{6} \\ \frac{DE}{6} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ DE &= \frac{6 \times \sqrt{2}}{2} \\ DE &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

  D'où,

$$\boxed{DE \approx 4,2\,\text{cm}}$$

- *2e réponse possible : en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle CDE.*

  - Calculons $\widehat{CDE}$
    On sait que CDE est un triangle rectangle en E.
    Or, si un triangle est rectangle alors ses angles aigus sont complémentaires.
    Donc

$$\begin{aligned} \widehat{CDE} + \widehat{DCE} &= 90^\circ \\ \widehat{CDE} + 45^\circ &= 90^\circ \\ \widehat{CDE} &= 90^\circ - 45^\circ \end{aligned}$$

    soit

$$\widehat{CDE} = 45^\circ$$

  - Montrons que CDE est un triangle isocèle en E.
    On sait que CDE est un triangle tel que

$$\widehat{CDE} = \widehat{DCE} = 45^\circ$$

    Or, si un triangle a deux angles de mêmes mesures, alors il est isocèle.
    Donc

$$\text{le triangle } CDE \text{ est isocèle en } E$$

  - Calculons DE.
    On sait que le triangle CDE est isocèle-rectangle en E.
    Or, si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.
    Donc,

$$\begin{aligned} DC^2 &= DE^2 + EC^2 \\ DC^2 &= DE^2 + DE^2 \\ 6^2 &= 2DE^2 \\ DE^2 &= \frac{36}{2} \\ DE^2 &= 18 \\ DE &= \sqrt{18} \\ DE &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

    D'où,

$$\boxed{DE \approx 4,2\,\text{cm}}$$

- *3e réponse possible : en montrant que le triangle CDE est un agrandissement du triangle ABC.*

  - Calculons $\widehat{CDE}$
    On sait que CDE est un triangle rectangle en E.
    Or, si un triangle est rectangle alors ses angles aigus sont complémentaires.
    Donc

$$\begin{aligned} \widehat{CDE} + \widehat{DCE} &= 90^\circ \\ \widehat{CDE} + 45^\circ &= 90^\circ \\ \widehat{CDE} &= 90^\circ - 45^\circ \end{aligned}$$

    soit

$$\widehat{CDE} = 45^\circ$$

suite page suivante...

- Montrons que CDE est un triangle isocèle en E.
  On sait que CDE est un triangle tel que
  $$\widehat{CDE} = \widehat{DCE} = 45^\circ$$
  Or, si un triangle a deux angles de mêmes mesures, alors il est isocèle.
  Donc
  $$\text{le triangle } CDE \text{ est isocèle en } E$$
- Montrons que CDE est un agrandissement du triangle ABC.
  On sait que ABC et CDE sont deux triangles isocèles-rectangles en C et E respectivement.
  Or, si deux triangles sont isocèles-rectangles alors l'un deux est un agrandissement de l'autre.
  Donc,
  $$\text{le triangle } CDE \text{ est un agrandissement du triangle } ABC$$
- Calculons AC.
  On sait que ABC est un triangle isocèle-rectangle en B.
  Or, si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des longueurs des côtés de l'angle droit.
  Donc
  $$\begin{array}{rcccc} AC^2 & = & AB^2 & + & BC^2 \\ AC^2 & = & AB^2 & + & AB^2 \\ AC^2 & = & 2^2 & + & 2^2 \\ AC^2 & = & 4 & + & 4 \\ AC^2 & = & 8 & & \end{array}$$
  D'où,
  $$AC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
- Calculons le coefficient d'agrandissement k entre les triangles ABC et CDE.
  On sait que le triangle rectangle en E est un agrandissement du triangle ABC rectangle en B. Donc,
  $$\begin{array}{rcl} CD & = & AC \times k \\ 6 & = & 2\sqrt{2} \times k \end{array}$$
  D'où,
  $$\begin{array}{rcl} k & = & \dfrac{6}{2\sqrt{2}} \\ k & = & \dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{array}$$
- Calculons DE.
  On sait que DE est un agrandissement du côté AB de coefficient $k = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.
  Donc,
  $$\begin{array}{rcl} DE & = & AB \times k \\ DE & = & 2 \times \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ DE & = & \dfrac{2 \times 3}{\sqrt{2}} \\ DE & = & \dfrac{6}{\sqrt{2}} \end{array}$$
  D'où
  $$\boxed{DE \approx 4,2\,\text{cm}}$$

4. On sait que le triangle CDE est rectangle en E.
Or, si un triangle est rectangle, alors le centre de son cercle circonsrit est le milieu de son hypoténuse.
Donc,

$$\boxed{\text{le centre } O \text{ du cercle } (\mathcal{C}),\text{ circonscrit au triangle } CDE \text{ est le milieu de } [CD]}$$

5. • Montrons que les triangles AMC et CMD sont rectangles en M.
On sait que M est un point du cercle $(\mathcal{C}')$ de diamètre $[AC]$ et un point du cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[CD]$.
Or, si un point est le sommet d'un triangle dont le cercle circonscrit est un de ses côtés, alors le triangle est rectangle.
Donc,

suite page suivante...

AMC et CMD sont deux triangles rectangles en M

- Calculons $\widehat{AMD}$.
  D'après ce qui précède, $widehatAMC = \widehat{CMD} = 90^\circ$, et on a

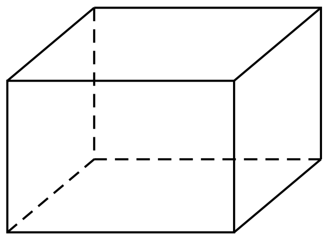
$$\begin{array}{rcccc} \widehat{AMD} & = & \widehat{AMC} & + & \widehat{CMD} \\ \widehat{AMD} & = & 90^\circ & + & 90^\circ \\ \widehat{AMD} & = & & 180^\circ & \end{array}$$

  D'où,

$$\boxed{\text{les points } A, M \text{ et } D \text{ sont alignés}}$$

EXERCICE 2 :

1. *On rappelle qu'une perpective cavalière d'un pavé droit doit être constituée d'au moins une face à l'échelle et que tous les côtés parallèles sont sur des fuyantes parallèles*



2. **a.** Si V_1 désigne le volume de l'aquarium, alors

$$\begin{array}{rcl} V_1 & = & 40 \times 20 \times 30 \\ V_1 & = & 24\,000 \end{array}$$

   D'où,

$$\boxed{\text{l'aquarium a un volume de } 24\,000\,\text{cm}^3}$$

   b.

$$\boxed{\text{l'aquarium peut contenir } 24\,\text{L d'eau}}$$

3. Si le diamt̀re d'une boule est de 30 cm, alors son rayon est égal à 15 cm.
   Donc son volume v s'écrit

$$\boxed{v = \frac{4}{3} \times \pi \times 15^3}$$

4. - Calculons le volume d'eau V_2 que contient le deuxième aquarium.
     On a, d'après la question 3,

$$\begin{array}{rcl} V_2 & = & \frac{3}{4} \times \left(\frac{4}{3} \times \pi \times 15^3\right) \\ V_2 & = & \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 15^3 \\ V_2 & = & \pi \times 15^3 \\ V_2 & = & 3375\pi \end{array}$$

   - Calculons la hauteur d'eau h qu'atteint l'eau une fois dans le premier aquarium.
     On sait que le premier aquarium est un pavé droit.
     Donc, le volume d'eau V_2 est celui d'un pavé droit dont la surface de base est la même que celle de l'aquarium et la hauteur est h.
     D'où,

$$\begin{array}{rcl} V_2 & = & 40 \times 20 \times h \\ 3375 \times \pi & = & 800 \times h \\ h & = & \frac{3375 \times \pi}{800} \\ h & = & \frac{25 \times 135 \times \pi}{25 \times 32} \\ h & = & \frac{135 \times \pi}{32} \end{array}$$

     soit :

$$\boxed{h \approx 13,3\,\text{cm}}$$

suite page suivante...

Problème

Partie I - La capacité à recueillir de l'eau de pluie

1. **a.** Le mode de la série étant égal à 1999,

$$\boxed{\text{1999 est l'année au cours de laquelle il y a eu le plus de précipitations}}$$

b. On sait que 867 L d'eau sont tombés sur une surface de $1\,\text{m}^2$.
Donc,

$$\boxed{867 \times 5 = 4335\,\text{L d'eau sont tombés sur une surface de } 5\,\text{m}^2}$$

2. Si q désigne la quantité moyenne d'eau tombée par mètre carré sur une année, alors

$$\begin{array}{rcl} q & = & \dfrac{1087+990+868+850+690+616+512+873+810+841+867}{11} \\ q & = & \dfrac{9004}{11} \\ q & \approx & 819 \end{array}$$

$$\boxed{\text{la quantité moyenne d'eau tombée par mètre carré sur une année est d'environ } 819\,\text{L/m}^2}$$

3. Soit S, la surface au sol de la maison.
On sait que le sol de la maison est la base d'un pavé droit de 13,9 m de long et de 10 m de large.
Donc,

$$\begin{array}{rcl} S & = & 13,9 \times 10 \\ S & = & 139 \end{array}$$

D'où,

$$\boxed{\text{la surface au sol de la maison est de } 139\,\text{m}^2}$$

4. D'après le tableau des précipitations et la question précédente, on obtient

$$\begin{array}{rcl} V & = & P \times S \times 0,9 \\ V & = & 867 \times 139 \times 0,9 \\ V & = & 867 \times 139 \times 0,9 \\ V & = & 108\,461,7 \end{array}$$

D'où,

le volume d'eau captée pour 2009 par la famille est de 108 461,7 L $= 108,4617\,\text{m}^3$

Donc

$$\boxed{\text{le volume d'eau captée pour 2009 par la famille est, à } 1\,\text{m}^3 \text{ près, de } 108\,\text{m}^3}$$

Partie II - Les besoins en eau

1. On sait que

- chaque personne consomme en moyenne 115 L d'eau par jour ;
- chaque personne consomme en moyenne 41 L d'eau par jour aux WC.

Donc, la proportion p d'eau que chaque personne consomme aux WC par jour est de

$$p = \frac{41}{115} \approx 0,357$$

soit

$$\boxed{p \approx 35,7\,\%}$$

2. On sait que chaque membre de la famille de 4 personnes consomme en moyenne 115 L d'eau par jour.
Donc, la famille consomme en moyenne $115 \times 4 = 460$ L d'eau par jour.
D'où, la famille consomme en moyenne $460 \times 365 = 167\,900$ L d'eau pour une année.
Mais, 60 % de cette quantité pouvant être remplacée par de l'eau de pluie, la famille consomme en moyenne $167\,900 \times 0,6 = 100\,740$ L d'eau de pluie pour une ann'ee, soit $100,74\,\text{m}^3$. Donc,

suite et fin page suivante...

$$\boxed{\text{la famille consomme environ } 100\,\mathrm{m}^3 \text{ en moyenne pour uen année}}$$

3. D'après la question 4, la capacité que collecte une maison comme celle décrite dans la partie précédente s'élверait, pour une année comme 2009, à $108\,\mathrm{m}^3$.
Donc,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{une telle famille habitant cette même maison pourrait, en 2009, récupérer l'eau}\\ \text{de pluie pour pouvoir suffire à ses besoins en eau de pluie}\end{array}}$$

Partie III - Le coût de l'eau

1. a.

$$\boxed{\text{Le montant à payer pour } 100\,\mathrm{m}^3 \text{ d'eau est d'environ } 250\,€.}$$

b. Le graphique donnant le coût de l'eau en fonction de la quantité est une droite qui passe par
- l'origine du repère ;
- le point de coordonnées $(100\,, 250)$.

Donc, $p(x)$ est une fonction linéaire qui s'écrit, pour tout x

$$p(x) = ax$$

et vérifie

$$p(100) = 250$$

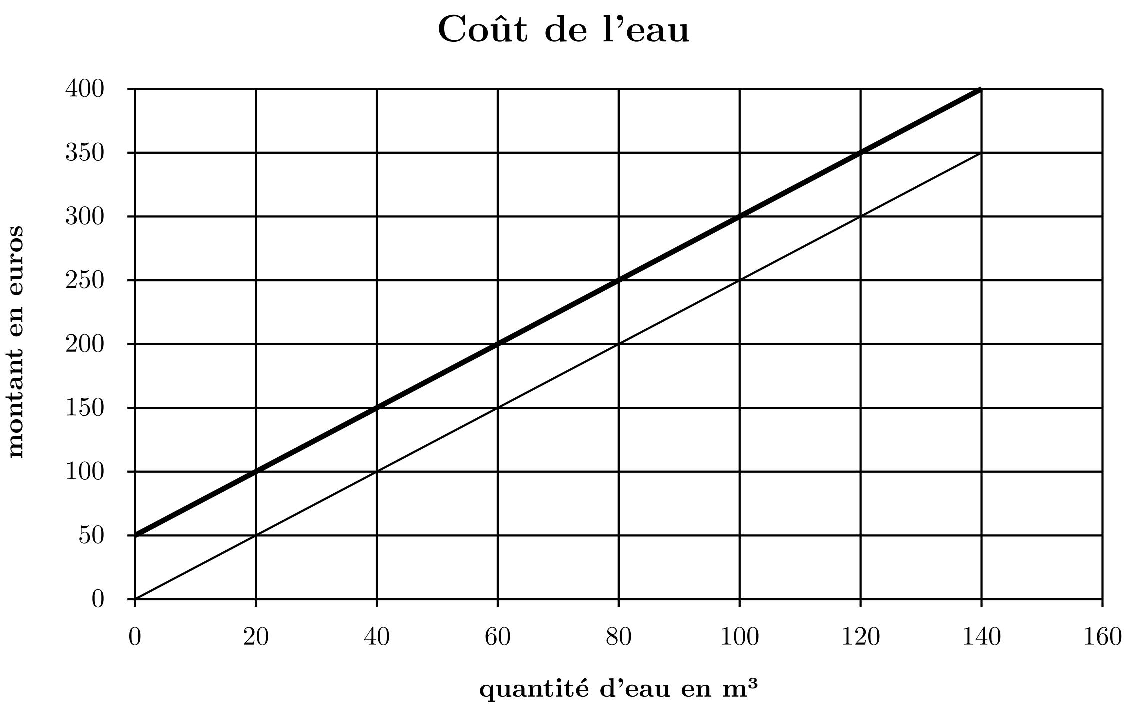
soit :

$$\begin{aligned} 100a &= 250 \\ a &= \frac{250}{100} \\ a &= 2,5 \end{aligned}$$

D'où, pour tout x,

$$\boxed{p(x) = 2,5x}$$

c.



2. Si la famille espère économiser 250 € par an alors il faudra au moins

$$\frac{910}{250} = 3,64$$

années pour compenser l'achat de la citerne.
Donc,

$$\boxed{\text{Les économies réalisées pourront compenser l'achat de la citerne au bout de 4 ans}}$$