

- ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES -

durée 2h - Calculatrice autorisée

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

EXERCICE 1 :

1. Alice participe à un jeu télévisé. Elle a devant elle trois portes fermées. Derrière l'une de ces portes, il y a une voiture ; derrière les autres, il n'y a rien.

Alice doit choisir l'une de ces portes. Si elle choisit la porte derrière laquelle il y a une voiture, elle gagne la voiture.

Alice choisit au hasard une porte. quelle est la probabilité qu'elle gagne la voiture ?

- a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{2}{3}$ d. On ne peut pas savoir

2. S'il y a quatre portes au lieu de trois et toujours une seule voiture à gagner, comment évolue la probabilité qu'a Alice de gagner la voiture ?

- a. augmente b. **diminue** c. reste identique d. On ne peut pas savoir

EXERCICE 2 :

1. Quelle est l'écriture décimale du nombre $\frac{10^5 + 1}{10^5}$?

$$\begin{aligned} \frac{10^5 + 1}{10^5} &= \frac{10^5}{10^5} + \frac{1}{10^5} \\ \frac{10^5 + 1}{10^5} &= 1 + 10^{-5} \\ \frac{10^5 + 1}{10^5} &= 1 + 0,00001 \\ \frac{10^5 + 1}{10^5} &= 1,00001 \end{aligned}$$

2. Antoine utilise sa calculatrice pour calculer le nombre suivant : $\frac{10^{15} + 1}{10^{15}}$. Le résultat affiché est 1.

Antoine pense que ce résultat n'est pas exact. A-t-il raison ?

On sait que

$$\frac{10^{15} + 1}{10^{15}} = \frac{10^{15}}{10^{15}} + \frac{1}{10^{15}}$$

Or,

$$\frac{10^{15}}{10^{15}} = 1$$

Donc,

$$\frac{10^{15} + 1}{10^{15}} \neq 1$$

D'où,

Antoine a raison

EXERCICE 3 : Lors d'un marathon, un coureur utilise sa montre-chronomètre. Après un kilomètre de course, elle lui indique qu'il court depuis quatre minutes et trente secondes.

La longueur officielle d'un marathon est de 42,195 km. Si le coureur garde cette allure tout au long de sa course, mettra-t-il moins de 3 h 30 pour effectuer le marathon ?

- *1^{re} réponse possible : en utilisant la proportionnalité.* Calculons le temps t en secondes que le coureur mettra à effectuer un marathon s'il parvient à garder l'allure.

Le coureur ayant mis 4 min 30 à courir 1 km, soit 270 s, on a le tableau suivant :

distance parcourue (km)	1	42,195
temps mis (s)	270	t

et on sait que le coureur garde la même allure.

Donc, le temps qu'il met à courir est proportionnel à la distance parcourue, et le tableau ci-dessus est un tableau de proportionnalité.

D'où,

$$t = \frac{42,195 \times 270}{1} = 11392,65$$

Soit :

$$t = 3 \text{ h } 9 \text{ min } 52,65 \text{ s}$$

D'où,

le coureur mettra moins de 3 h 30 à parcourir un marathon

- *2^e réponse possible : en calculant sa vitesse.* Calculons la vitesse v en km/s que le coureur tient sur 1 km.

$$v = \frac{1}{270}$$

Mais, le coureur maintient la même allure.

Donc, le temps t qu'il mettra à parcourir 42,195 km est égal à

$$t = \frac{42,195}{v}$$

$$t = \frac{42,195}{\frac{1}{270}}$$

$$t = 42,195 \times 270$$

$$t = 11392,65$$

Soit :

$$t = 3 \text{ h } 9 \text{ min } 52,65 \text{ s}$$

D'où,

le coureur mettra moins de 3 h 30 à parcourir un marathon

EXERCICE 4 : On cherche à résoudre l'équation $(4x - 3)^2 - 9 = 0$.

1. Le nombre $\frac{3}{4}$ est-il solution de cette équation ? et le nombre 0 ?

- Testons si $\frac{3}{4}$ est solution de l'équation.

Soit $G = (4x - 3)^2 - 9$, alors :

$$\begin{aligned} G &= \left(4 \times \frac{3}{4} - 3\right)^2 - 9 \\ G &= \left(3 - 3\right)^2 - 9 \\ G &= 0 - 9 \\ G &= -9 \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{3}{4} \neq 0$$

Donc,

$\frac{3}{4}$ n'est pas une solution de l'équation
--

- Testons si 0 est une solution de l'équation.

Soit $G = (4x - 3)^2 - 9$, alors :

$$\begin{aligned} G &= \left(4 \times 0 - 3\right)^2 - 9 \\ G &= \left(0 - 3\right)^2 - 9 \\ G &= 9 - 9 \\ G &= 0 \end{aligned}$$

Donc,

0 est une solution de l'équation

2. Prouver que, pour tout nombre x , $(4x - 3)^2 - 9 = 4x(4x - 6)$.

- 1^{re} réponse possible : en développant et réduisant les deux membres de l'égalité.

Soient $G = (4x - 3)^2 - 9$ et $D = 4x(4x - 6)$, alors

$$\begin{aligned} G &= (4x)^2 - 2 \times 4x \times 3 + 3^2 - 9 & D &= 4x(4x - 6) \\ G &= 16x^2 - 24x + 9 - 9 & D &= 16x^2 - 24x \\ G &= 16x^2 - 24x \end{aligned}$$

D'où,

$(4x - 3)^2 - 9 = 4x(4x - 6)$

- 2^e réponse possible : en factorisant le 1^{er} membre de l'égalité.

Soient $G = (4x - 3)^2 - 9$, alors

$$\begin{aligned} G &= (4x - 3)^2 - 3^2 \\ G &= [(4x - 3) + 3] [(4x - 3) - 3] \\ G &= [4x] [4x - 6] \end{aligned}$$

D'où,

$(4x - 3)^2 - 9 = 4x(4x - 6)$

3. Déterminer les solutions de l'équation $(4x - 3)^2 - 9 = 0$.

D'après la question précédente, les solutions de l'équation $(4x - 3)^2 - 9 = 0$ sont exactement celles de l'équation $4x(4x - 6) = 0$.

Mais, si un produit est nul, alors un de ses facteurs est nul.

D'où,

$$\begin{array}{lcl} 4x & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{lcl} 4x - 6 & = & 0 \\ 4x & = & 6 \\ x & = & \frac{6}{4} \\ x & = & \frac{3}{2} \end{array}$$

D'où,

les solutions de l'équation $(4x - 3)^2 - 9 = 0$ sont 0 et $\frac{3}{2}$
--

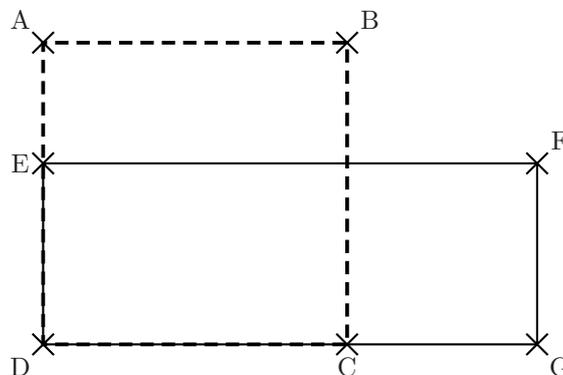
ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

EXERCICE 5 : Le dessin ci-dessous représente une figure composée d'un carré ABCD et d'un rectangle DEFG.

E est un point du segment [AD].

C est un point du segment [DG].

Dans cette figure la longueur AB peut varier mais on a toujours : $AE = 15$ cm et $CG = 25$ cm.



1. Dans cette question on suppose que : $AB = 40$ cm

a. Calculer l'aire du carré ABCD.

Soit \mathcal{A}_{ABCD} , l'aire du carré ABCD, alors

$$\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2$$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = 40^2$$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = 1\,600$$

D'où,

l'aire du carré est de $1\,600$ cm²

b. Calculer l'aire du rectangle DEFG.

Soit \mathcal{A}_{DEFG} , l'aire du rectangle DEFG, alors

$$\mathcal{A}_{DEFG} = DE \times DG$$

Mais, les points E et C appartenant respectivement aux segments [AD] et [DG], on a

$$\mathcal{A}_{DEFG} = (AD - AE) \times (DC + CG)$$

$$\mathcal{A}_{DEFG} = (40 - 15) \times (40 + 25)$$

$$\mathcal{A}_{DEFG} = 25 \times 65$$

$$\mathcal{A}_{DEFG} = 1\,625$$

D'où,

l'aire du rectangle est de $1\,625$ cm²

2. Peut-on trouver la longueur AB de sorte que l'aire du carré ABCD soit égale à l'aire du rectangle DEFG ? Si oui, calculer AB. Si non, expliquer pourquoi.

Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.

Posons x , la longueur en centimètres du côté [AB].

• Calculons \mathcal{A}_{ABCD} .

D'après la question 1a, on a

$$\mathcal{A}_{ABCD} = x^2$$

• Calculons \mathcal{A}_{DEFG} .

D'après la question 1b, on a

$$\mathcal{A}_{DEFG} = (x - 15)(x + 25)$$

• Cherchons les valeurs de x qui rendent égales les deux aires \mathcal{A}_{ABCD} et \mathcal{A}_{DEFG} .

suite page suivante...

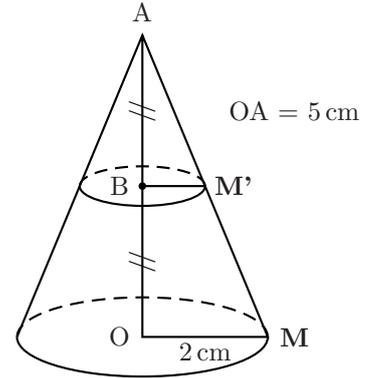
$$\begin{array}{rcl}
 (x - 15) & \times & (x + 25) = \mathcal{A}_{\text{ABCD}} \\
 x^2 + 25x & - & 15x - 375 = x^2 \\
 x^2 + & 10x & - 375 = x^2 \\
 & 10x & - 375 = 0 \\
 & 10x & = 375 \\
 & x & = \frac{375}{10} \\
 & x & = 37,5
 \end{array}$$

D'où,

l'aire du rectangle DEFG est égale à celle du carré ABCD lorsque $AB = 37,5 \text{ cm}$

EXERCICE 6 :

On considère un cône de révolution de hauteur 5 cm et dont la base a pour rayon 2 cm. Le point A est le sommet du cône et O le centre de sa base. B est le milieu de [AO].



1. Calculer le volume du cône en cm^3 . on arrondira à l'unité.
on rappelle que la formule est : $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$
où h désigne la hauteur et R le rayon de la base.

Si V désigne le volume en cm^3 du cône, alors

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi R^2 h}{3} \\ V &= \frac{\pi \times 2^2 \times 5}{3} \\ V &= \frac{\pi \times 4 \times 5}{3} \\ V &= \frac{20\pi}{3} \end{aligned}$$

D'où,

le volume du cône est, à 1 cm^3 près, égal à 21 cm^3

2. On effectue la section du cône par le plan parallèle à la base qui passe par B. on obtient ainsi un petit cône. Est-il vrai que le volume du petit cône est égal à la moitié du volume du cône initial ?

- 1^{re} réponse possible : en calculant le rayon de base, la hauteur et le volume du petit cône.

– Calculons le rayon de base R' du petit cône.

Soit M, un point du bord de la base du cône initial.

Soit M', le point du bord de la base du petit cône tel que M' appartienne à la génératrice [AM] du cône initial.

On sait que la base du petit cône est parallèle à celle du cône initial.

Donc, le rayon de base [BM'] du petit cône est parallèle au rayon de base [OM] du cône initial.

On sait que, dans le triangle AOM, B est le milieu de [OA] et que [BM'] est parallèle à [OM].

Or, si une droite coupe un côté d'un triangle parallèlement à un autre, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Donc, M' est le milieu de [AM].

On sait que, dans le triangle AOM, B et M' sont les milieux respectifs des côtés [OA] et [AM].

Or, si deux points sont les milieux respectifs des côtés d'un triangle, alors le segment de droite qu'ils définissent a une longueur égale à la moitié de celle du troisième côté.

Donc,

$$\begin{aligned} BM' &= \frac{OM}{2} \\ BM' &= \frac{2}{2} \\ BM' &= 1 \end{aligned}$$

D'où,

BM' = 1 cm

– Calculons la hauteur h' du petit cône.

On sait que le petit cône a pour sommet A et que B est le milieu de la hauteur [OA] du cône initial.

Donc,

$$h' = AB$$

soit :

$$h' = \frac{OA}{2}$$

$$h' = \frac{2}{2}$$

$$h' = 2,5$$

D'où,

$$h' = 2,5 \text{ cm}$$

– Calculons le volume V' du petit cône.

D'après la formule donnée, on a

$$V' = \frac{\pi R'^2 h'}{3}$$

$$V' = \frac{\pi \times 1^2 \times 2,5}{3}$$

$$V' = \frac{2,5\pi}{3}$$

D'où,

$$\text{le volume en cm}^3 \text{ du petit cône est égal à } \frac{2,5\pi}{3}$$

– Comparons le volume du petit cône et celui du cône initial.

$$\frac{V'}{V} = \frac{2,5\pi}{20\pi}$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{2,5\pi}{3} \times \frac{3}{20\pi}$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{2,5}{20}$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{8}$$

Donc,

$$\text{le volume du petit cône est égal à } \frac{1}{8} \text{ de celui du cône initial}$$

- *2^e réponse possible : en calculant le coefficient de réduction par rapport au cône initial.*
Soit M un point du bord de la base du cône initial.
Soit M' , le point du bord de la base du petit cône appartenant à la génératrice $[AM]$ du cône initial.

On sait que la base du petit cône est parallèle à celle du cône initial.

Donc, le rayon de base $[BM']$ du petit cône est parallèle au rayon de base $[OM]$ du cône initial.

On sait que, dans le triangle AOM , B appartient à $[AO]$, M' appartient à $[AM]$ et que (BM') est parallèle à (OM) .

Or, d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AB}{AO} = \frac{AM'}{AM} = \frac{BM'}{OM}$$

Donc, le triangle ABM' est une réduction du triangle AOM de coefficient

$$k = \frac{AB}{AO}$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Mais, si un agrandissement ou une réduction est de coefficient k , alors les volumes sont multipliés par k^3 .

Donc,

$$\text{le volume du petit cône est égal à } \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \text{ de celui du cône initial}$$

- 3^e réponse possible : en montrant que le petit cône peut être au moins contenu plus d'une fois dans le reste du cône initial.

On sait que B est le milieu de la hauteur [AO].

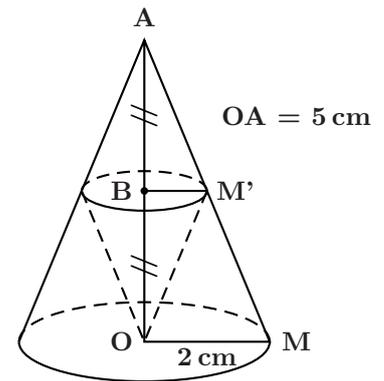
Donc, O est le symétrique de A par rapport à B.

Mais, le plan de coupe étant parallèle à la base du cône initial, l'axe (AO) du petit cône coïncide avec l'axe du cône de sommet O et de base le disque de centre B et de rayon BM'.

Donc, le reste du cône initial contient plus d'une fois le volume du petit cône.

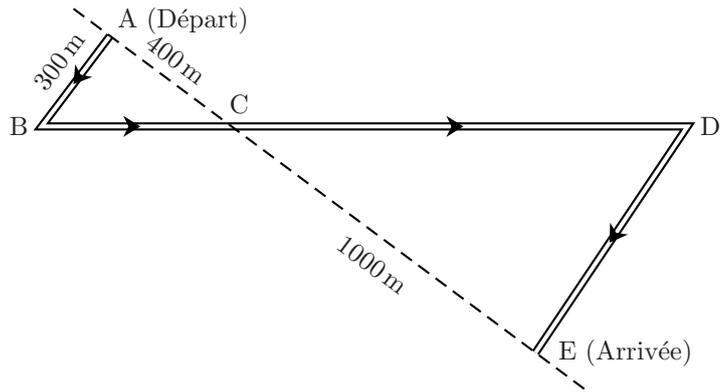
D'où,

le volume du petit cône n'est pas égal à la moitié du volume du cône initial



EXERCICE 7 :

Des élèves participent à une course à pied. Avant l'épreuve, un plan leur a été remis. Il est représenté par la figure ci-contre.



On convient que :

- Les droites (AE) et (BD) se coupent en C.
- Les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
- ABC est un triangle rectangle en A.

Calculer la longueur réelle du parcours ABCDE.

Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.

Soit l , la longueur réelle du parcours ABCDE, alors

$$l = AB + BC + CD + DE$$

- Calculons BC.

On sait que le triangle ABC est rectangle en A.

Or, d'après le théorème de Pythagore,

$$BC^2 = BA^2 + AC^2$$

Donc

$$BC^2 = 300^2 + 400^2$$

$$BC^2 = 90\,000 + 160\,000$$

$$BC^2 = 250\,000$$

D'où,

$$BC = 500 \text{ m}$$

- Calculons CD et DE.

On sait que

- les points A, C et E d'une part, et B, C et D d'autre part, sont alignés dans cet ordre ;
- les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Or, d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{CE} = \frac{AB}{DE}$$

Donc,

$\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{CE}$ $\frac{500}{CD} = \frac{400}{400}$ $400 \times CD = \frac{500 \times 1\,000}{500 \times 1\,000}$ $CD = \frac{400}{5\,000}$ $CD = \frac{4}{1250}$	et	$\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{DE}$ $\frac{400}{400} = \frac{300}{DE}$ $400 \times DE = \frac{300 \times 1\,000}{300 \times 1\,000}$ $DE = \frac{400}{3\,000}$ $DE = \frac{4}{750}$
--	----	---

D'où,

$$CD = 1\,250 \text{ m}$$

D'où,

$$DE = 750 \text{ m}$$

D'où,

$$l = AB + BC + CD + DE$$

$$l = 300 + 500 + 1\,250 + 750$$

$$l = 800 + 2\,000$$

$$l = 2\,800$$

D'où,

$$\boxed{\text{la longueur réelle du parcours est de } 2\,800 \text{ m}}$$

PROBLÈME

Les trois parties de ce problème sont indépendantes. Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf si une indication contraire est donnée.

PARTIE I :

À partir du 2 janvier 2012, une compagnie aérienne teste un nouveau vol entre Nantes et Toulouse. Ce vol s'effectue chaque jour à bord d'un avion qui peut transporter au maximum 190 passagers.

1. L'avion décolle chaque matin à 9 h 35 de Nantes et atterrit à 10 h 30 à Toulouse.
Calculer la durée du vol.

Si d désigne la durée en minutes du vol effectué par l'avion, alors

$$\begin{aligned}d &= 10 \text{ h } 30 - 9 \text{ h } 35 \\d &= 9 \text{ h } 90 - 9 \text{ h } 35 \\d &= \quad \quad 55\end{aligned}$$

D'où,

la durée du vol est de 55 min

2. Le tableau suivant donne le nombre de passagers qui ont emprunté ce vol pendant la première semaine de mise en service. L'information concernant le mercredi a été perdue.

Jour	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche	Total
Nombre de passagers	152	143		164	189	157	163	1 113

- a. Combien de passagers ont emprunté ce vol le mercredi ?

Soit n , le nombre de passagers ayant emprunté ce vol le mercredi, alors

$$\begin{aligned}n &= 1\,113 - (152 + 143 + 164 + 189 + 157 + 163) \\n &= 1\,113 - \quad \quad \quad 968 \\n &= \quad \quad 145\end{aligned}$$

D'où,

145 passagers ont emprunté ce vol le mercredi

- b. En moyenne, combien y avait-il de passagers par jour dans l'avion cette semaine-là ?

Soit \bar{n} , le nombre moyen de passagers par jour présents dans l'avion cette semaine-là, alors

$$\begin{aligned}\bar{n} &= \frac{1\,113}{7} \\ \bar{n} &= 159\end{aligned}$$

D'où,

il y avait en moyenne 159 passagers par jour dans l'avion cette semaine-là

3. À partir du mois de février, on décide d'étudier la fréquentation de ce vol pendant douze semaines. La compagnie utilise une feuille de calcul indiquant le nombre de passagers par jour. Cette feuille de calcul est donnée en ANNEXE page 7/7.

- a. Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule I2 pour obtenir le nombre total de passagers au cours de la semaine 1 ?

La formule permettant le calcul de la somme des données présentes dans les cellules B2 à H2 s'écrit :

=SOMME(B2 :H2)

ou

=B2+C2+D2+E2+F2+G2+H2)

suite page suivante...

- b. Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule J2 pour obtenir le nombre moyen de passagers par jour au cours de la semaine 1 ?

La formule permettant le calcul de la moyenne des données présentes dans les cellules B2 à H2 s'écrit :

`=MOYENNE(B2 :H2)`

ou

`=I2/7`

4. Le nombre moyen de passagers par jour au cours de ces douze semaine est égal à 166. La compagnie s'était fixé comme objectif d'avoir un nombre moyen de passagers supérieur aux 80 % de la capacité maximale de l'avion.

L'objectif est-il atteint ?

Calculons le taux de remplissage moyen \bar{t} de l'avion.

On sait que l'avion peut transporter au maximum 190 passagers.

Donc,

$$\begin{aligned}\bar{t} &= \frac{166}{190} \\ \bar{t} &= \frac{83}{95} \\ \bar{t} &> \frac{100}{80} \\ \bar{t} &> \frac{100}{100}\end{aligned}$$

D'où,

`L'objectif que s'était fixé la compagnie est atteint`

PARTIE II :

Quand l'avion n'est plus très loin de l'aéroport de Toulouse, le radar de la tour de contrôle émet un signal en direction de l'avion. Le signal atteint l'avion et revient au radar 0,0003 secondes après son émission.

1. Sachant que le signal est émis à la vitesse de 300 000 kilomètres par seconde, vérifier qu'à cet instant, l'avion se trouve à 45 kilomètres du radar de la tour de contrôle.

Si

- v désigne la vitesse du signal du radar en km/s ;
- d la distance parcourue par le signal en km ;
- t le temps mis par le signal pour effectuer un aller-retour entre le radar et l'avion en s

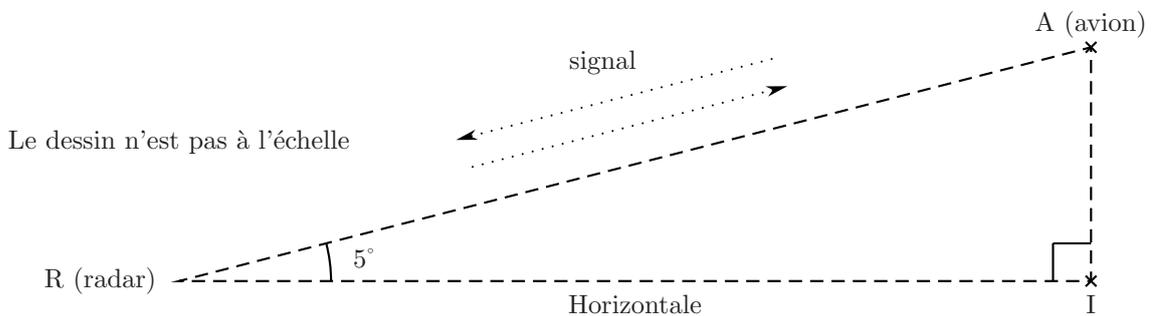
alors

$$\begin{aligned}v &= \frac{d}{t} \\300\,000 &= \frac{d}{0,0003} \\d &= 300\,000 \times 0,0003 \\d &= 90\end{aligned}$$

D'où, le signal a parcouru une distance de 90 km

Autrement dit,

l'avion se trouve à une distance de $\frac{90}{2} = 45$ kilomètres du radar



2. La direction radar-avion fait un angle de 5° avec l'horizontale.

Calculer alors l'altitude de l'avion à cet instant. on arrondira à la centaine de mètres près.

On négligera la hauteur de la tour de contrôle.

On sait que le triangle RIA est rectangle en I.

Donc

$$\begin{aligned}\sin \widehat{IRA} &= \frac{AI}{AR} \\ \sin 5^\circ &= \frac{AI}{45} \\ AI &= 45 \sin 5^\circ \\ AI &\approx 3,922\end{aligned}$$

D'où,

l'avion se trouve à une hauteur d'environ 3 900 m

PARTIE II :

En phase d'atterrissage, à partir du moment où les roues touchent le sol, l'avion utilise ses freins jusqu'à l'arrêt complet. Le graphique en **ANNEXE** représente la distance parcourue par l'avion sur la piste (en mètres) en fonction du temps (en secondes) à partir du moment où les roues touchent le sol.

En utilisant ce graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Quelle distance l'avion aura-t-il parcourue 10 s après avoir touché le sol ?

Par lecture graphique,

on constate que l'avion aura parcouru 450 m dès lors qu'il aura touché le sol

2. Expliquer pourquoi au bout de 22 s et au bout de 26 s la distance parcourue depuis le début de l'atterrissage est la même.

On sait que l'avion freine jusqu'à l'arrêt complet.

Donc, si au bout de 22 s et au bout de 26 s, la distance parcourue depuis le début de l'atterrissage est la même, alors

l'avion est déjà à l'arrêt complet au bout de 22 s

3. À partir du moment où les roues touchent le sol, combien de temps met l'avion pour s'arrêter ?

On constate que la courbe est celle d'une fonction constante à partir d'une abscisse entre 19 s et 20 s.

Donc, à partir du moment où les roues touchent le sol,

l'avion met entre 19 s et 20 s pour s'arrêter