DEVOIRS DE VACANCES de la 4ème à la 3ème

Pour réussir sereinement son passage en 3ème et ensuite au lycée, le collégien doit adapter sa façon de travailler aux exigences attendues : le travail personnel quotidien est essentiel et il lui sera demandé un plus grand degré d'autonomie.
Ce livret d'exercices a été réalisé par les professeurs du collège.
Il reprend le programme de 4ème et permet un entraînement pour aborder la classe de 3ème dans les meilleures conditions.
Les exercices doivent être traités en autocorrection pendant les vacances d'été : une correction sera d'ailleurs disponible mi-aout sur le site du collège

http://www.clg-mace-suresnes.ac-versailles.fr

Les élèves ayant eu des difficultés à travailler certaines notions doivent dans un premier temps revoir leur cours de 4ème puis, si les difficultés persistent, en faire part à leur professeur de maths dès la rentrée pour envisager une remédiation/rappel rapide en cours.

Une évaluation de vos acquis de 3ème en mathématiques sera organisée fin septembre sous la forme d'un contrôle commun faisant suite au travail effectué pendant les vacances.

Programme :

1) Calcul numérique : nombres relatifs, fractions, puissances et écriture scientifique, proportionnalité.
2) Calcul algébrique : développer, factoriser, résoudre des équations
3) Statistiques : description d'une série statistique, moyenne
4) Théorème de Pythagore
5) Solides de l'espace

1) Calcul numérique

Règle des signes

Le produit ou le quotient de plusieurs nombres relatifs est:
- Positif s'il y a un nombre pair de facteurs négatifs
- Négatif s'il y a un nombre impair de facteurs négatifs

Calcul avec les fractions

Pour additionner ou soustraire deux fractions il faut les réduire au même dénominateur, il suffit ensuite d'additionner (ou soustraire) les numérateurs.

$A=\frac{4}{3}-\frac{2}{7}=\frac{4\times7}{3\times7}-\frac{2\times3}{7\times3}=\frac{28}{21}-\frac{6}{21}=\frac{22}{21}$

$B = 2 - \frac{8}{3}=\frac{2\times3}{1\times3}-\frac{8}{3}=\frac{6-8}{3}=-\frac{2}{3}$

Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$D=\frac{2}{15}\times\frac{-5}{7}=\frac{2\times(-5)}{15\times7}=\frac{-2\times5}{3\times5\times7}=\frac{-2}{21}$

$E = -2\times\frac{-5}{7}=\frac{-2\times(-5)}{1\times7}=\frac{10}{7}$

Pour diviser par une fraction on multiplie par l'inverse de la fraction

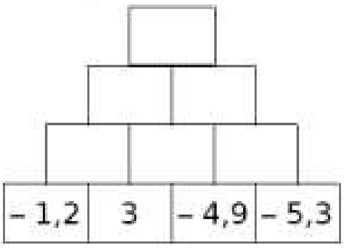
$F=\frac{-5}{7}\div\frac{3}{4}=\frac{-5}{7}\times\frac{4}{3}=\frac{-20}{21}$

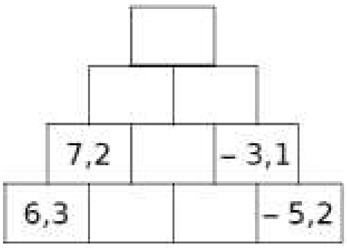
$G=\frac{3}{4}\div2=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

Ex 1 : Pour déterminer le signe des produits données, complète avec des nombres et les mots « positif, négatif, pair, impair.

a) Dans le produit $(-1)\times2\times(-3)\times(-4)\times(-5)$, il y a ……….. facteurs …………… , ce nombre étant ……….. alors ce produit est ……………
b) Dans le produit $(-1)\times(-2)\times(-3)\times(-4)\times(-5)$, il y a ……….. facteurs …………… , ce nombre étant ……….. alors ce produit est ……………
c) Dans le produit $(-1)\times2\times(-3)\times(-4)\times(-5)\times6$, il y a ……….. facteurs …………… , ce nombre étant ……….. alors ce produit est ……………
d) $(-1)\times2\times(-3)\times0\times(-4)\times5=$ ……………

Ex 2 : Complète chacune des cases sachant que chaque nombre est la somme des nombres se trouvant juste dans les deux cases en dessous.





Ex 3 : Effectue les produits ou quotients suivants sans poser les opérations et sans calculatrice

$3 \times (-9) =$ ………	$10 \div 10 =$ ………	$170 \times (-50) =$ ………
$-4 \times 8 =$ ………	$(-6) \div (-8) =$ ………	$(-25) \times 4 =$ ………
$23 \times (-1) =$ ………	$0 \times (-79) =$ ………	$10 \div (-10) =$ ………
$(-9)\times (-4) =$ ………	$-80 \times (-200) =$ ………	$-100 \times 21 =$ ………

Ex 4 : Effectue chaque calcul du tableau, puis range les nombres obtenus dans l'ordre croissant. Remplace alors chaque nombre par la lettre correspondante : quelle phrase obtient-on ?

Calcul	Lettre
$- 8 + (- 4) =$	S
$- 7 \times (- 3) =$	O
$18 : (- 6) =$	N
$7 – 5 =$	H
$5 \times (- 2) =$	U
$-8 – 9 =$	E
$-16 : 4 =$	U
$-4 \times (- 5) =$	I
$-2 \times (- 5) \times 1 \times (- 3) \times 2 =$	J
$-2 – 5 + 1 – 3 + 2 =$	I
$-3 + 4 \times 8 =$	N
$7 + 6 \times (- 2) =$	S
$(-200 – 70) : (- 30) =$	M
$-10 + 4^2 =$	A
$38 – 5^2 =$	P
$(- 3)^2 - 5 \times 3 + 4 =$	C

Ex 5 : Calcule les expressions suivantes en donnant le résultat sous forme de fraction irréductible et en donnant les étapes de calculs. Tu peux ensuite vérifier à l'aide de la calculatrice.

$A = \frac{8}{5} + \frac{7}{5} \times \frac{3}{5}$ $B = \frac{53}{30} - \left(\frac{6}{10} + \frac{8}{10}\right)$ $C = \frac{7}{6} \times \frac{7}{2} - \frac{3}{2}$ $D = \frac{9}{2} \times \left(\frac{3}{12} - \frac{4}{18}\right)$ $E = \frac{\frac{5}{3} - \frac{7}{9}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}$

Ex 6 : Résoudre les deux problèmes suivants

problème 1 : Théo a 117 billes, il en donne le tiers à Owen et la moitié du reste à Ben. Quel est le nombre de billes que Ben récupère.

problème 2 : Que représente en minutes et secondes la moitié de trois quarts d'heure ?

Puissances

$$10^n = \underbrace{10\times10\times...\times10}_{n\ facteurs} = \underbrace{10...0}_{n\ zéros} \qquad 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\underbrace{10...0}_{n\ zéros}} = 0,\underbrace{0...01}_{n\ chiffres\ après\ la\ virgule}$$

Définition : Ecriture scientifique d'un nombre décimal

L'écriture scientifique d'un nombre décimal est l'unique écriture de la forme : $a\times10^n$

où **a** est un nombre décimal qui possède un seul chiffre avant la virgule, ce chiffre étant non nul, et **n** est un nombre entier

Exemples : l'écriture scientifique de 76 800 000 est $7{,}68\times10^7$

l'écriture scientifique de 0,000 064 est $6{,}4\times10^{-5}$

40×10^8 et $0{,}726\times10^{-5}$ ne sont pas des écritures scientifiques.

$$a^n\times a^p = a^{n+p} \qquad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \qquad (a^n)^p = a^{n\times p}$$

$$2^3\times2^4 = 2^{3+4} = 2^7 \qquad \frac{7^5}{7^2} = 7^{5-2} = 7^3 \qquad \frac{3^3}{3^{-5}} = 3^{3-(-5)} = 3^{3+5} = 3^8$$

$$(9^{-6})^3 = 9^{-6\times3} = 9^{-18}$$

Remarque : Pour simplifier les calculs, on peut commencer par regrouper les puissances de 10 puis regrouper les nombres.

Exemple : $\frac{4\times10^2\times9\times10^{-5}}{10^{-7}\times6\times10} = \frac{4\times9}{6}\times\frac{10^2\times10^{-5}}{10^{-7}\times10} = \frac{36}{6}\times\frac{10^{-3}}{10^{-6}} = 6\times10^{-3-(-6)} = 6\times10^3$

Ex 1 :

a) Exprimer sous la forme d'une seule puissance

$A = 2^3\times2^5 \qquad B = 10^5\times10^{-3} \qquad C = \frac{2^3}{2^{-5}} \qquad D = (2^3)^3$

b) Écris les nombres suivants en notation scientifique

6 540 ; 23,45 ; 0,001 ; $0{,}056\times10^{11}$; $1234{,}56\times10^{-12}$

Ex 2 : Les habitants de Beauvallon (Drôme) paient environ 2,30 € le mètre cube d'eau du robinet.

1) Combien de litres y a-t-il dans un mètre cube ?
2) Combien coûte un litre d'eau ?
3) Une douche consomme en moyenne 50 litres d'eau, combien coûte une douche ?
4) Un bain consomme en moyenne 150 litres d'eau, combien coûte un bain ?
5) Quelle économie fait-on en prenant une douche plutôt qu'un bain ?
6) Combien coûte le remplissage d'une piscine de 32m^3 ?

Proportionnalité

Ex 1 : Compléter les tableaux de proportionnalité suivants en appliquant la méthode suggérée par les indications

35	1	60
21		

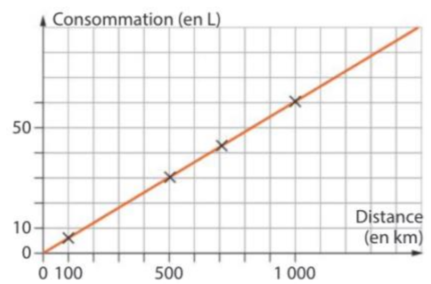
4 + 30 = 34

4	30	34
9	67,5	

1,5	5
1,62	

produits en croix

Ex 2 : On considère le graphique suivant



1) Quelles sont les deux grandeurs qui interviennent sur ce graphique ?
2) La consommation de carburant est-elle proportionnelle à la distance parcourue ? Justifier.
3) Quelle est la consommation de cette voiture pour 1 000 km ?
4) En déduire la consommation pour 2 000 km.

2) Calcul algébrique

Pour développer une expression on utilise les formules de distributivité suivantes:

$k(a + b) = ka + kb$ et $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

S'il y a un signe + devant une parenthèse, on peut supprimer les parenthèses

S'il y a un signe - devant une parenthèse, on peut supprimer les parenthèses en changeant tous les signes dans la parenthèse

Exemples:

$A = 4(y - 5) = 4y - 4\times5 = 4y-20$

$B = (4 - t)(2t - 7) = 4\times2t + 4\times(-7) - t\times2t - t\times(-7) = 8t - 28 - 2t^2 + 7t = -2t^2+15t$
$- 28$

$C = 4 + (5 - p) = 4 + 5 - p = 9 - p$

Pour factoriser une expression:

On repère les deux membres de l'expression

On cherche un facteur en commun dans chaque membre et on le souligne

On l'écrit en tête de calcul et on ouvre une parenthèse où on écrit tout ce qu'on n'a pas souligné

Exemples:

$E = 4y^2 + 12y = \underline{4y}y + 3\times\underline{4y} = 4y(y + 3)$

Ex 1 **:**

Factorise les expressions suivantes

$A = 4x + 4y$ $B = x^2 + 2x$ $C = 3x + 27x^2$

Supprime les parenthèses dans les expressions suivantes (voir règles ci-dessus)

$D = 3x - (2y + 7)$ $E = -6 + (7xy - x^2)$ $F = 9w - (-5 + x)$ $G = 8 + (-7x - x^2)$

Simplifie au maximum les expressions suivantes

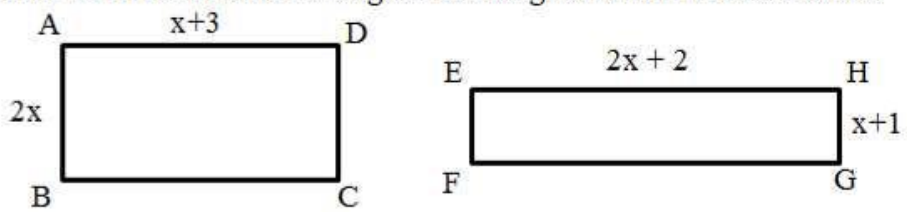
$H = 3x + 7x - 4x$ $I = x^2 + 6x^2 - 5x^2$

$J = 5y + 7 - y^2 + 8 - 6y + 4y^2 - 5y$ $K = 6x - (-2x - 8) + 7x^2 + (-x^2 + 3x) - 7$

Développe et réduis les expressions suivantes

$L = (4x+3)(5 - x)$ $M = 5(2x+1) - 10x + 3$ $O = (x+5)(3x+2)$

Ex 2 : ABCD et EFGH sont deux rectangles. Les longueurs sont données en cm.



1a) Calculer la longueur et la largeur des deux rectangles pour x = 4cm

b) Les deux rectangles ont-ils la même aire pour x = 4cm ? Justifier

c) Les deux rectangles ont-ils le même périmètre pour x = 4cm ? Justifier

2a) Exprimer le périmètre de chacun des rectangles en fonction de x.

b) Ont-ils le même périmètre pour n'importe quelle valeur de x ? Justifier.

EQUATIONS

Règles

On ne change pas une égalité lorsqu'on ajoute ou on soustrait un même nombre à chacun de
membres.

On ne change pas une égalité lorsqu'on multiplie ou on divise par un même nombre non nul c
de ses membres.

égalité	Application d'une propriété	Nouvelle égalité
a + 7 = 15	Je soustrais 7 à chaque membre de l'égalité	**a** = 8
3 **b** = 15	Je divise par 3 chaque membre de l'égalité	**b** = 5
c – 9 = -3	J'ajoute 9 à chaque membre de l'égalité	**c** = 6
d = - 4	Je multiplie par 2 chaque membre de l'égalité	**d** = -8

Ex 1 : Résoudre les équations suivantes

$3x + 2 = x + 6$ $\quad$ $4z – 2 = 7z + 4$ $\quad$ $2(p – 3) = 4 + (p – 1)$ $\quad$ $4 – (3y + 1) = 3(y + 5)$

$25a - 12 = 3 + 20a$ $\quad$ $3b + 2b = 2 + 4b - 5$ $\quad$ $-2(t - 5) = 3(2 - 4t)$

Ex 2 : On multiplie un nombre par 3 puis on ajoute 7 au résultat et on trouve 58. Quel est ce nombre ?

Ex 3 : On donne le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- lui ajouter 2
- multiplier la somme obtenue par le nombre choisi
- ajouter 1 à ce résultat
- écrire le résultat

a) Écrire les calculs permettant de vérifier que si l'on fait fonctionner ce programme avec le nombre $–1$, on obtient 0.

b) Faire fonctionner ce programme avec le nombre $–6$, puis le nombre 4.

c) Écrire l'expression obtenue avec un nombre x

3) Statistiques

Ex 1 : Voici le temps passé au téléphone (arrondi à l'heure près) en une semaine par des collégiens.

Temps (en heure)	3	6	9	12	15
effectif	34	68	41	15	5

a) Quelle est la population étudiée ? Quel est le caractère étudié ? Quel est l'effectif total ?

b) Quelle est la fréquence, arrondi à l'unité, de la classe 9 ? Interpréter la réponse avec une phrase.

c) Calculer la moyenne de cette série statistique. Interpréter le résultat avec une phrase.

Ex 2 : Claire a une moyenne de 9,5 sur 20 avec ses 7 premiers contrôles.

Quelle note doit-elle obtenir au $8^{\text{ème}}$ devoir pour avoir une moyenne de 10 ? Expliquer votre démarche.

4) Théorème de Pythagore

Th1 : Théorème de Pythagore: Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés : Si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Application 1: Calculer la longueur de l'hypoténuse.

Calculer, en centimètre, la longueur de l'hypoténuse [NI] du triangle PIN.

On sait que: PIN est rectangle en P; [IN] est l'hypoténuse ; PI = 2,1 cm et PN = 2,8 cm.

Donc d'après le théorème de Pythagore, on a:

$IN^2 = IP^2 + PN^2$ — *Écrire l'égalité de Pythagore avec les longueurs en lettres*

$IN^2 = 2{,}1^2 + 2{,}8^2$ — *Remplacer les longueurs connues.*

$IN^2 = 4{,}41 + 7{,}84$ — *Effectuer les calculs.*

$IN^2 = 12{,}25$ — *On utilise, si besoin la touche racine carrée de la calculatrice.*

Donc IN = 3,5 .

Donc l'hypoténuse [IN] mesure 3,5 cm. — *Conclure avec l'unité et la précision demandée.*

Th 2 : Contraposée du théorème de Pythagore: Si le carré de la longueur du plus grand côté d'un triangle n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle n'est pas rectangle.

Ex 1 :

Soit DFU un triangle rectangle en U tel que FU = 3,5 cm et DU = 5,1 cm.

1) Tracer le triangle DFU .

2) Calculer la longueur du segment [FD]. Justifier la réponse. On donnera une valeur approchée au millième.

Ex 2 :

Soit JKL un triangle rectangle en L tel que JK = 5 cm et KL = 4 cm.

Calculer la longueur du segment [JL]. Justifier la réponse.

Th3 : Réciproque du théorème de Pythagore: Si le carré de la longueur du plus grand côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.

Application 2: Le triangle SET tel que ET = 13 cm, SE = 5 cm et ST = 12 cm est-il un triangle rectangle?

On sait que [ET] est le plus grand côté du triangle.

D'une part $ET^2 = 13^2 = 169$ — *On calcule le carré du plus grand côté.*

D'autre part $SE^2 + ST^2 = 5^2 + 12^2 = 169$ — *On calcule la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés*

Donc $ET^2 = SE^2 + ST^2$ — *On compare les résultats obtenus.*

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle SET est rectangle en S.

Application 3: Le triangle IJK tel que IK = 28 cm, IJ = 20 cm et JK = 21 cm est-il rectangle ?

On sait que [IK] est le plus grand côté du triangle.

D'une part: $IK^2 = 28^2 = 784$.

D'autre part: $IJ^2 + JK^2 = 20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841$

Donc $IK^2 \neq IJ^2 + JK^2$.

Donc d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle IJK n'est pas rectangle.

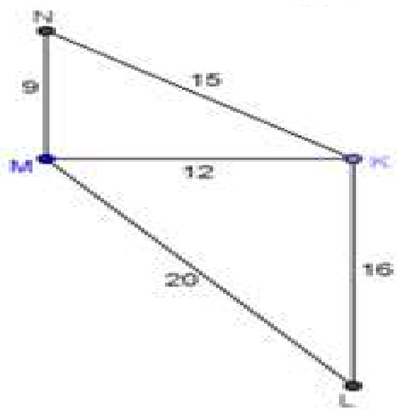
Ex 3 :

On considère la figure ci-contre.

1) Le triangle MNK est-il rectangle ?

2) Le triangle MKL est-il rectangle ?

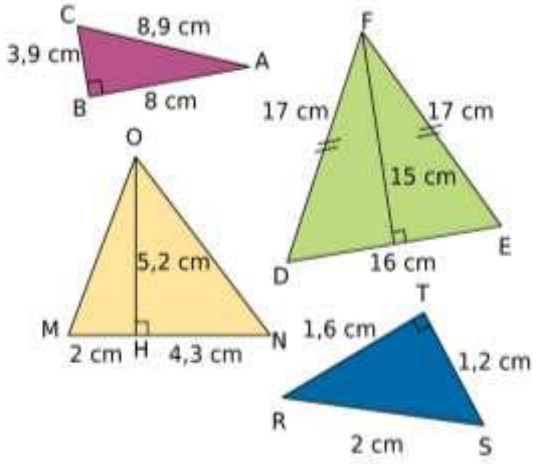
3) Les droites (KL) et (MN) sont-elles parallèles ?



5) Aires et Volumes

Revoir les formules de périmètre, d'aire et de volume des figures usuelles connues en 4ème

Ex 1 : Calculer l'aire des triangles suivants



Ex 2 : Faire une figure à main levée et calculer le volume des pyramides suivantes :

a) hauteur de la pyramide : 7,5 cm , base de la pyramide : triangle ABC rectangle en A tel que AB = 4 cm , AC = 3 cm et BC = 5 cm.

b) Pyramide du Louvre : hauteur 21 m et base carrée de côté 34 m.

Ex 3 : On considère le solide ci-contre, composé d'un cylindre et d'un cône posé sous le cylindre.

Calculer la valeur exacte du volume du cylindre

Calculer la valeur exacte du volume du cône

En déduire la valeur exacte du volume du solide.

convertir en Litres.